EXERCICE N°1 : 6 points 35 '

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence, que pour tout n de on a : $u_n > 2$.

2) Montre que la suite u est décroissante puis en déduire un majorant de (u_n).

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$.

a- Montrer que v est une suite arithmétique de raison 3.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) a- Montrer que pour tout n de IN on a : $u_{n+1} - 2 \geq \dfrac{1}{2}(u_n - 2)$.

b- Montrer que pour tout n de IN on a : $u_n - 2 \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c- Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ .Montrer que pour tout n de IN : $S_n \geq 2n + 4 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis en déduire que (S_n) est divergente

EXERCICE N°2 : 5 points 25 '

On considère la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n \leq \sqrt{2}$

2) Etudier la monotonie de la suite U .

3) Soit la suite réelle V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n^2}{2 - U_n^2}$.

a) Montrer que V est une suite arithmétique.

b) Exprimer U_n en fonction de n . Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{U_k^2}$. Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°3 : 4 points 25 '

U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

1/ Calculer U_1, U_2 et U_3 .

2/ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

3/ En déduire que (U_n) converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

EXERCICE N°4 : 6 points 35 '

On considère une suite u définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par : $u_2 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}\frac{n+1}{n}u_n + n + 1$, pour tout $n \geq 2$.

1) a- Calculer u_4 .

b- u est-elle une suite arithmétique ? Géométrique ?

2) On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$, pour tout $n \geq 2$.

a- Montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$, pour tout $n \geq 2$.

b- Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$ on a $v_n < 3$.

c- Montrer que v est une suite croissante.

3) On pose $w_n = v_n - 3$, pour tout $n \geq 2$.

a- Montrer que w est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b- Etudier les variations de w.

c- Exprimer en fonction de n : w_n, v_n, u_n et $S_n = v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n$.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com